数理解析研究所講究録 1236 巻 2001 年 9-20

随伴軌道の中の極小ラグランジュ部分多様体のハミルトン安定性について

東工大・数学　　小野　肇 (Hajime Ono)
Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology.

1　イントロダクション

Y.-G. Oh は [Oh] においてコンパクト・ケーラー多様体の中の極小ラグランジュ部分多様体の (体積に関する) 安定性、および、ハミルトン安定性 (これはあとで定義する) について調べた。まずは、その結果の概略を見てみる。

(M^{2m},ω) をコンパクト・ケーラー多様体とし、$\iota: L^m \hookrightarrow M$ をラグランジュ埋め込み (すなわち、$\iota^*\omega=0$) とする。特に、この埋め込みが極小 (すなわち、埋め込みの平均曲率ベクトルが 0) とする。Oh による安定性に関する結果は次のように与えられる。

- $c_1(M)$ が 0 または負 $\Rightarrow$ 任意の極小ラグランジュ部分多様体は安定
- $c_1(M)$ が正 $\Rightarrow$ 極小ラグランジュ部分多様体 L が安定ならば
  $H^1(L;\mathbb{R})=0$

これは、L の法変分ベクトル $V\in\Gamma(NL)$ (ただし、NL は L の法ベクトル束) に対して、体積の第二変分のヤコビ作用素が

$$\tilde{\omega}^{-1}\circ\Delta_h\circ\tilde{\omega}-(\bar{R}_{|NL})^{\perp}$$

で与えられる事からわかる。ただし、$\bar{R}$ は M のリッチ作用素、Δ_h は $\Omega^1(L)$ に作用するラプラシアン、$\tilde{\omega}:\Gamma(NL)\to\Omega^1(L)$ は $\tilde{\omega}(V):=\iota^*(V\lrcorner\omega)$ で与えられ、L がラグランジュ部分多様体であることから、$\tilde{\omega}$ は同型である。

特に、(M,ω) がケーラー・アインシュタインでリッチ形式 $\rho = c\omega$ の場合には、

$$L:\text{安定} \iff \mu_1(L) \geq c$$

がわかる。ただし、$\mu_1(L)$ は Δ_h の正の第一固有値である。

一方、Oh は極小ラグランジュ部分多様体に対して次のようなハミルトン安定性の概念を考え、その条件を調べた。

まず、極小ラグランジュ部分多様体 L に対して、

$$L\text{がハミルトン安定} \iff \text{任意の}L\text{の法方向の変形}\{L_t\}$$

$$\left(\text{つまり、}\left(\frac{dL_t}{dt}\right)_{|t=0} \in \Gamma(NL)\right)\text{で}$$

$$\tilde{\omega}\left(\left(\frac{dL_t}{dt}\right)_{|t=0}\right)\text{が完全形式になるもの}$$

$$\text{に対して、}\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}\mathrm{Vol}(L_t) \geq 0$$

と定義する。Oh によるハミルトン安定性に関する結果は次のように与えられる。

(M,ω) がケーラー・アインシュタインでリッチ形式 $\rho = c\omega$ の場合には、

- 第二変分のヤコビ作用素は $\tilde{\omega}^{-1}(d\Omega^0(L))$ を保つ。
- L がハミルトン安定 $\iff \lambda_1(L) \geq c$

ただし、$\lambda_1(L)$ は Δ_L （$C^\infty(L)$ に作用するラプラシアン）の正の第一固有値である。

ハミルトン安定な極小ラグランジュ部分多様体の例としては

- $\mathbb{RP}^n \subset \mathbb{CP}^n$
- クリフォードトーラス $T^n \subset \mathbb{CP}^n$

$$\left(\underbrace{S^1\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \times \cdots \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}_{n+1\text{ 個}} \subset S^{2n+1}(1) \subset \mathbb{C}^{n+1}\text{の }S^1\text{による商}\right)$$

- Amarzaya ー大仁田 [AO] の例

などが知られている。これは、それぞれの極小ラグランジュ部分多様体のラプラシアンの第一固有値を求める事で確かめられている。

そこで、ケーラー多様体(M,ω)の極小ラグランジュ部分多様体LについてそのΔ_Lの正の第一固有値$\lambda_1(L)$について調べる、という事を考える。

特に、M^{2m}として、コンパクト半単純リー群Gの随伴軌道を考える。Gのリー環$\mathfrak{g}$上にはAd_G-不変な内積$(\ ,\ )$をとる。随伴軌道M上には標準的複素構造J、標準的シンプレクティック形式F（これは$G-$不変で、Jに関してケーラー）があり、Jに関するケーラー・アインシュタイン計量が存在する事が知られている。(これらはあとで見るが、詳しくは[B]を参照。)

一方、M上には$(\ ,\ )_{|M}$に付随した2次形式$\omega(X,Y)=(JX,Y)_{|M}$があるが、これは一般にはケーラーではなく（ωは閉とは限らない）エルミート形式である。そこで、次の仮定を満たすような場合を考える。(これを満たすような例はあとで見る)。

$$\langle\text{仮定}\rangle\quad \text{ある定数}\alpha>0\text{が存在して }\omega=\alpha F$$

このとき次の定理を示す事ができる。

定理 1.1. (M,ω)を上の仮定を満たすものとする。$L\subset M$を極小ラグランジュ閉部分多様体とすると、

$$\lambda_1(L)\leq\frac{s}{2m}$$

ただし、sは$(\ ,\ )_{|M}$のスカラー曲率（今の場合は定数である)、$\lambda_1(L)$は$C^\infty(L)$に作用するラプラシアンΔ_Lの正の第一固有値である。また、Lの$\mathfrak{g}$への埋め込みを$l:L\hookrightarrow\mathfrak{g}$と書いた時

$$\text{等号成立}\quad\Longleftrightarrow\quad d_L\in\mathfrak{g}\text{があって}\,l-d_L\text{の各成分は}\Delta_L\text{の第一固有関数}$$

が成り立つ。さらに(M,ω)がケーラー・アインシュタインでリッチ形式$\rho=c\omega$であるとき、

$$\lambda_1(L)\leq c$$

であり、d_LはLによらず0になる。

さらに、定理1.1のケーラー・アインシュタインの場合にはより強く次のことが言える。

定理 1.2. (M,ω) を定理 *1.1* と同じとし、さらにケーラー・アインシュタインで $\rho = c\omega$ とする。このとき、ラグランジュ部分多様体 $L \subset M$ に対して次は同値。

1. L は極小
2. $\Delta_L l = cl$
3. $l : L \hookrightarrow S^{\dim G - 1}\left(\sqrt{m/c}\right)$ でこの埋め込みも極小

Oh によるハミルトン安定性に関する条件と定理1.2 により、次の系を得る。

系 1.3. (M,ω) を定理 *1.1* と同じとし、さらにケーラー・アインシュタインで $\rho = c\omega$ とする。ラグランジュ閉部分多様体 $L \subset M$ に対して次は同値。

1. L は極小かつハミルトン安定
2. $\lambda_1(L) = c$ かつ、$\Delta_L l = cl$

2 随伴軌道

ここでは随伴軌道の標準的複素構造やケーラー計量に関して復習する。(詳しくは、[B] の Chapter 8 を参照。)

G をコンパクト半単純リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環、$(\ ,\ )$ を $\mathfrak{g}$ 上の Ad_G 不変内積、M をある随伴軌道とする。

まず、$T_w\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$ の同一視のもとで、$w \in M$ に対して

$$T_wM \simeq \mathrm{Image}\,\mathrm{ad}_w, \quad N_wM \simeq \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_w$$

となる。特に、$U \in \mathfrak{g}$ に関する基本ベクトル場 X_U は $X_U(w) = [U,w]$(ここで、$[\ ,\ ]$ は $\mathfrak{g}$ のブラケット)である事がわかるので、任意の接ベクトル $X \in T_wM$ に対して基本ベクトル場 X_U が存在して $X = X_U(w)$ となる。

次に、標準的複素構造を定義する。$w \in M$ に対して、$G_w := \{g \in G|\,\mathrm{Ad}(g)w = w\}$ とし、S_w をその連結中心、$\mathfrak{s}_w$ をそのリー環とする。($w \in \mathfrak{s}_w$ に注意する。) 今、G_w は随伴作用により T_wM に作用するので、その S_w への制限を考える。S_w による作用についての T_wM の既約分解(これは $(\ ,\ )_{|M}$ に関する直交分解)を

$$T_wM = \sum_{j=1}^{m} E_{w,j}$$

と書く。ただし、$E_{w,j}$ は実2次元ベクトル空間で、$E_{w,j}$ 上 S_w は

$$\exp(s) \mapsto \begin{pmatrix} \cos a_j(s) & -\sin a_j(s) \\ \sin a_j(s) & \cos a_j(s) \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathfrak{s}_w)$$

と同値な作用をしている。(a_j は線型であり、$a_j(w) > 0$ となるようにとる。)この時、TM 上の概複素構造 J を、$w \in M$ に対して、

$$J_w X := \frac{1}{a_j(w)}[w, X] \qquad (X \in E_{w,j})$$

により定義すると、$G-$ 不変で可積分な複素構造である事がわかる([B] の Chapter 8 参照)。この J を標準的複素構造と呼ぶ。

また、標準的シンプレクティック形式 F が $w \in M$ に対して、

$$F_w(X, Y) := (w, [U, V]) \qquad (X, Y : M \text{ 上のベクトル場})$$

と定義される。ただし、$U, V \in \mathfrak{g}$ は $X(w) = [U, w]$, $Y(w) = [V, w]$ を満たすものである。これは $G-$ 不変であり、J に関してケーラーである。

最後に、$G-$ 不変リッチ形式について見てみる。

$$\text{リッチ形式} \Leftarrow \text{複素構造} \ \& \ \text{volume form}$$

であり、今は複素構造として標準的複素構造 J を固定して考える(J は $G-$ 不変であった)。また、$G-$ 不変な volume form は定数倍を除いて $(\ ,\ )_{|M}$ の volume form Ω に等しい。したがって、volume form を定数倍しても得られるリッチ形式は変わらないので、任意の $G-$ 不変なケーラー計量のリッチ形式は J と Ω から得られる2次形式 ρ に等しい。この ρ は

$$\rho_w(X, Y) = (\gamma(w), [U, V])$$

により求まる。ただし、$\{X_j, J_w X_j\}$ を $E_{w,j}$ の($(\ ,\ )_{|M}$ に関する)正規直交基底としたとき、$\mathfrak{s}_w \ni \gamma(w) = \sum_{j=1}^{m} [X_j, J_w X_j]$ と定義し、$U, V \in \mathfrak{g}$ は F の定義をした時のものと同じとする。この ρ は正定値である事がわかるので、これをケーラー形式と思うとケーラー・アインシュタインとなる([B] の Chapter 8 を参照)。

最後に、1章の〈仮定〉が成り立つための必要十分条件を述べておこう。

命題 2.1. ある正の定数 α に対して $\omega = \alpha F$ となるための必要十分条件はある $w \in M$ と任意の j に対して $\alpha = a_j(w)$ となる事である。

Proof. $w \in M$, $X_j \in E_{w,j}$, $X_k \in E_{w,k}$ $(j \neq k)$ とする。
このとき、$X_j = \left[\frac{1}{a_j(w)} J_w X_j, w\right]$ なので、F の定義から、

$$\begin{aligned} F_w(X_j, X_k) &= \left(w, \left[\frac{1}{a_j(w)} J_w X_j, \frac{1}{a_k(w)} J_w X_k\right]\right) \\ &= \frac{1}{a_j(w)a_k(w)}([w, J_w X_j], J_w X_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ただし、2 番目の等式は (,) の Ad 不変性より言え、3 番目の等式は $[w, J_w X_j] \in E_{w,j}$ であり、$E_{w,j}$ と $E_{w,k}$ の (,) に関する直交性から言える。
一方、同様にして、

$$\begin{aligned} F_w(X_j, J_w X_j) &= \left(w, \left[\frac{1}{a_j(w)} J_w X_j, -\frac{1}{a_j(w)} X_j\right]\right) \\ &= \frac{1}{a_j(w)}(\frac{1}{a_j(w)}[w, X_j], J_w X_j) \\ &= \frac{1}{a_j(w)}\omega(X_j, JX_j) \end{aligned}$$

となる。$a_j(w)$ は Ad 不変なので命題が言えた事になる。 □

3 定理の証明

定理 1.1 の証明には次の B.-Y. Chen による定理を用いる。

定理 3.1 (B.-Y. Chen [C]). $x : (M^m, g) \to (\mathbb{R}^k, (\ , \ ))$ を閉リーマン多様体 (M, g) からユークリッド空間 $(\mathbb{R}^k, (\ , \ ))$ への等長はめ込みとする。H をこのはめ込みの平均曲率ベクトルとするとき、

$$\int_M (H, H)^{\frac{m}{2}} dv \geq \left(\frac{\lambda_1(M)}{m}\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{Vol}(M)$$

が成り立つ。

等号成立 $\Longleftrightarrow$ ある定ベクトル $c \in \mathbb{R}^k$ があって

$x - c$ の各成分が第一固有関数

この定理を、

$$L \subset M \subset \mathfrak{g}$$

に関して応用する事を考える。まず、$M \subset \mathfrak{g}$ の第2基本形式 σ と平均曲率ベクトル H を求めよう。

補題 3.2. $w \in M$ とし、$p_w : \mathfrak{g} \to \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_w$ を直交射影とする。このとき

(1) $\sigma_w(X,Y) = p_w([V,[U,w]])$
(2) $\sigma_w(JX,JY) = \sigma_w(X,Y)$
(3) $M \subset \mathfrak{g}$ の平均曲率ベクトルを H とすると、

$$H_w = -\frac{1}{m\alpha}\gamma(w)$$

(4) $(H,H) = \frac{s}{2m^2}$

Proof. まず、(1) については、基本ベクトル場 X_U, X_V について確かめればよいが、$(\mathfrak{g}, (\ ,\ ))$ に関するレビ・チビタ接続を D とすると、$(D_{X_U}X_V)(w) = [V,[U,w]]$ であるので (1) は直ちに従う。

次に (2) であるが、$JX(w) = [-\frac{X(w)}{\alpha}, w]$、$Y(w) = [\frac{JY(w)}{\alpha}, w]$ なので (1) より、

$$\begin{aligned}
\sigma_w(JX,JY) &= \sigma_w(JY,JX) \\
&= p_w\left(\left[-\frac{X(w)}{\alpha}, JY(w)\right]\right) \\
&= p_w\left(\left[\frac{JY(w)}{\alpha}, X(w)\right]\right) \\
&= \sigma_w(X,Y)
\end{aligned}$$

(3) については、$\{X_j, JX_j\}$ を $E_{w,j}$ の $(\ ,\ )_M$ に関する正規直交基底とした時、(1)、(2) より、

$$\begin{aligned}
H_w &= \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}\{\sigma_w(X_j,X_j) + \sigma_w(JX_j,JX_j)\} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_w(X_j,X_j) \\
&= \frac{1}{m}p_w\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{JX_j}{\alpha}, X_j\right] \\
&= -\frac{1}{m\alpha}\gamma(w) \qquad (\gamma(w) \in \mathfrak{s}_w \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_w \text{ より})
\end{aligned}$$

最後に (4) は次の計算からわかる。

$$
\begin{aligned}
\frac{s}{2} &= \sum_{j=1}^{m} \rho_w(X_j, JX_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\gamma(w), \left[\frac{JX_j}{\alpha}, -\frac{X_j}{\alpha} \right] \right) \\
&= \frac{1}{\alpha^2} (\gamma(w), \gamma(w))
\end{aligned}
$$

□

この補題の系として定理3.1 を用いると次のことが言える。

系 3.3. 随伴軌道 M に対して等長埋め込みを $x : M \to \mathfrak{g}$ と書く。(M, J, ω) が定理 *1.1* と同じ仮定を満たし、更にケーラー・アインシュタイン（リッチ形式 $= c\omega$）とする。このとき、

$$\Delta_M x = 2cx$$

ただし、Δ_M は $C^\infty(M)$ に作用するラプラシアン。(これと高橋恒郎の定理より、

$$x : M \hookrightarrow S^{\dim G - 1}\left(\sqrt{m/c}\right)$$

が極小であることがいえる。)

Proof. まず、M 上には0でないキリングベクトル場が存在するので、$\lambda_1(M)$ $2c$ がわかる。一方、埋め込み x に対して補題 3.2 を定理 3.1 に用いると $\lambda_1(M) \leq 2c$ が言え、x は定理 3.1 でちょうど等号が成立している事がわかる。また、補題 3.2 の (3) と

$$F : \text{ケーラー・アインシュタイン} \iff \gamma(w) = \mathrm{const}.w$$

であることから、($\Delta_M = -2mH$ だったので) $\Delta_M x = 2cx$ がわかる。 □

補題 3.4. $L \subset M$ をラグランジュ部分多様体とし $L \subset \mathfrak{g}$ の平均曲率ベクトルを $\tilde{H}$ と書く。このとき、

$$L : \text{極小} \iff \tilde{H}_w = H_w \qquad (w \in L)$$

Proof. $(T_wL, (\ ,\ )_{|L})$ の正規直交基底を $\{X_j\}_{j=1}^m$、$L \subset M$ の平均曲率ベクトルを $\overline{H}$ とすると補題 3.2 の (2) により、

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_w &= \overline{H}_w + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma(X_j, X_j) \\
&= \overline{H}_w + \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}\{\sigma(X_j, X_j) + \sigma(J_wX_j, J_wX_j)\} \\
&= \overline{H}_w + H_w
\end{aligned}
$$

□

補題 3.2 の (4) と補題 3.4 を Chen による定理 3.1 に代入すれば、定理 1.1 は証明できた。また、定理 1.2 は系 3.3 と補題 3.4 より直ちに得られる。

4　例

この章では、例として、$G = SU(n)$、$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$、そして、$(X, Y) = -\operatorname{trace} XY$　(ただし、$X, Y \in \mathfrak{su}(n)$) について考える。(その他の例 ($SO(2n)$ や $SO(2n+1)$ や $Sp(n)$) については [B] を参照)

まず、次の元 $w_0 \in \mathfrak{su}(n)$ をとり、その軌道 $M \subset \mathfrak{su}(n)$ を考える。

$$
w_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\lambda I_p & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}\mu I_{n-p} \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda - \mu > 0,\ p\lambda + (n-p)\mu = 0)
$$

ただし、$I_p \in \mathfrak{gl}(p, \mathbb{R})$, $I_{n-p} \in \mathfrak{gl}(n-p, \mathbb{R})$ は単位行列とする。

軌道 M はグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})$ と

$$
x \mapsto \sqrt{-1}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(n) \qquad (x \in \mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})
$$

により同一視される。ただし、$x \in \mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C})$ は長さ 1 で互いに直交するベクトル $(a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{C}^n$ $(j = 1, \dots, p)$ により張られる $\mathbb{C}^n$ の p 次元複素部分空間で代表される元であるとし、A_{jk} は

$$
A_{jj} = (\lambda - \mu)(|a_{j1}|^2 + \cdots + |a_{jp}|^2) + \mu
$$

$$A_{jk} = (\lambda - \mu)(a_{j1}\overline{a}_{k1} + \cdots + a_{jp}\overline{a}_{kp})$$

により定義される。

このとき、w_0 における幾何学的対象（接空間、複素構造等）は次のように書ける。

$$\begin{aligned} T_{w_0}M &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ -{}^t\overline{A} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(n) \right\} \\ &\simeq \{X \in \mathfrak{su}(n) | \operatorname{ad}_{w_0} X = (\lambda - \mu) J_0 X\} \end{aligned}$$

ただし、J_0X は行列

$$J_0 = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

の X への左からの積である。特にこれが $T_{w_0}M$ での複素構造を与える。

$$\mathfrak{s}_{w_0} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\langle w_0 \rangle$$

かつ、

$$\omega = (\lambda - \mu)F$$

がわかり、このことから、(M, ω) が 1 章の〈仮定〉を満たし、ケーラー・アインシュタインである事が言える。さらに、リッチ形式が $c\omega$ に等しいとすると、

$$c = \frac{n}{(\lambda - \mu)^2}$$

である事が計算出来るので、系 3.3 より、ある $\sqrt{-1}(d_{jk}) \in \mathfrak{su}(n)$ が存在して、写像

$$x \mapsto \sqrt{-1}(A_{jk} - d_{jk}) \quad (x \in \mathrm{Gr}_{n,p}(\mathbb{C}))$$

の各成分の実部、虚部は Δ_M の $\frac{2n}{(\lambda-\mu)^2}$ 固有関数である。

特に、$p = 1$ のときは随伴軌道 M は複素射影空間 $\mathbb{CP}^{n-1}$ と同一視でき、1 章にある例（実射影空間とクリフォードトーラス）はそれぞれ、

$$\mathbb{RP}^{n-1} = \{[z_1, \ldots, z_n] | z_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$$

$$\text{（クリフォードトーラス）} = \{[z_1, \ldots, z_n] | \, |z_1| = \cdots = |z_n|\} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$$

で与えられる事がわかるので、これに定理 1.1 を用いれば、これらの部分多様体のラプラシアンの第一固有関数が得られる事になる。

5　より一般のケースについて

最後に、プレプリント [O1] 以降にわかった事について述べる。(詳しくは [O2])

[O1] では「ある定数 $\alpha > 0$ が存在して $\omega = \alpha F$」を仮定していたが、この仮定をなくしても、ケーラー・アインシュタインの場合においては、定理 1.1 と同様な事がいえることもある;

随伴軌道 $x : M \hookrightarrow \mathfrak{g}$ で G-不変ケーラー・アインシュタイン形式 ω を考える ($\rho = c\omega$)。もし、

$$\Delta_M x = 2cx$$

を満たすとすると、極小ラグランジュ部分多様体 $L \subset M$ で $l : L \hookrightarrow \mathfrak{g}$ が $\int_L l dv_g = 0$ を満たすものに対して、

$$L : \text{ハミルトン安定} \iff \lambda_1(L) = c$$

がいえる。

〈この仮定を満たす随伴軌道の例〉

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu > \nu > 0$$

とおく。

- $SO(2+2r)$ の

$$\begin{pmatrix} \mu J & 0 \\ 0 & 0 I_{2r} \end{pmatrix}, \qquad (I_{2r} : \text{単位行列})$$

  の軌道

- $SO(6)$ の

$$\begin{pmatrix} 2\mu J & 0 & 0 \\ 0 & \mu J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\mu J & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mu J & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\mu J \end{pmatrix}$$

  の軌道

- $SO(4)$ の

$$\begin{pmatrix} \mu J & 0 \\ 0 & \nu J \end{pmatrix}$$

の軌道

などがある。

参考文献

[AO] A. Amarzaya, Y. Ohnita, Hamiltonian stability of certain minimal Lagrangian submanifolds in complex projective space, preprint.

[B] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Erge. der Math. und Grenz. 3, Springer-Verlag, 1987.

[C] B. -Y. Chen, *Geometry of submanifolds and its applications*, Science University of Tokyo, 1981.

[Oh] Y. -G. Oh, Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds, Invent. Math. **101** (1990), pp. 501-519.

[O1] H. Ono, Minimal Lagrangian submanifolds in adjoint orbits and upper bounds on the first eigenvalue of the Laplacian, preprint.

[O2] H. Ono, in preparation.